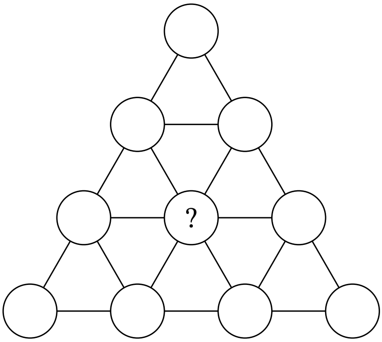
9 класс (решения)

Задача 9.1. В блокноте нарисована треугольная сетка (см. рисунок). Таня расставила в узлы сетки целые числа. Назовём два числа *близкими,* если они находятся в соседних узлах решётки. Известно, что

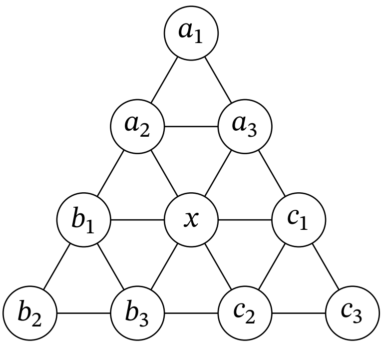
- сумма всех десяти чисел равна 43;
- сумма любых трёх чисел таких, что любые два из них близки, равна 11.

Чему равно центральное число?



Ответ: 10.

Решение. Обозначим числа переменными, как показано на рисунке.

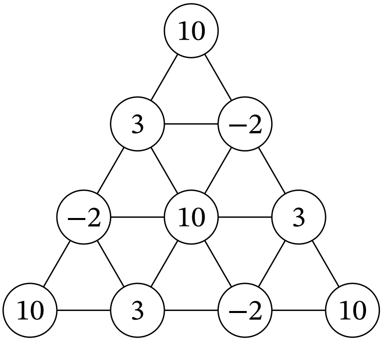


Тогда

$$a_1 + a_2 + a_3 = b_1 + b_2 + b_3 = c_1 + c_2 + c_3 = 11\,;$$
$$(a_1 + a_2 + a_3) + (b_1 + b_2 + b_3) + (c_1 + c_2 + c_3) + x = 43\,.$$

Отсюда мы получаем, что $x = 10$.

Пример подходящей расстановки чисел изображён ниже.



□

Задача 9.2. Наименьшее общее кратное четырёх попарно различных чисел равно 165. Какое максимальное значение может принимать сумма этих чисел?

Ответ: 268.

Решение. Раз 165 является наименьшим общим кратным четырёх чисел, то эти числа являются делителями 165. Чтобы максимизировать сумму этих чисел, достаточно взять четыре наибольших делителя 165. Если один из них будет самим числом 165, то НОК наверняка тоже будет ему равен.

Тогда максимальная сумма будет равна

$$165 + \frac{165}{3} + \frac{165}{5} + \frac{165}{11} = 165 + 55 + 33 + 15 = 268\,.$$

□

Задача 9.3. Учитель написал на доске дробь, у которой числитель и знаменатель — натуральные числа. Миша прибавил к числителю данной дроби 30 и записал полученную дробь к себе в тетрадь, а Лёша вычел из знаменателя дроби, записанной на доске, 6 и также записал полученную дробь к себе в тетрадь. Дроби, записанные мальчиками, оказались равны одному и тому же числу. Что это за число?

Ответ: 5.

Решение. Пусть $\frac{a}{b}$ — первоначальная дробь. Тогда Миша записал к себе в тетрадь дробь $\frac{a+30}{b}$, а Лёша — $\frac{a}{b-6}$.

Запишем уравнение

$$\frac{a+30}{b} = \frac{a}{b-6}\,.$$

Преобразуя его, получаем

$$(a+30)(b-6) = ab\,;$$

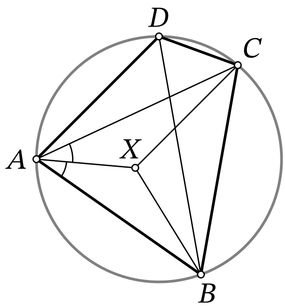
$$ab + 30b - 6a - 180 = ab\,;$$

$$30b = 6a + 180\,;$$

$$\frac{a+30}{b} = 5\,.$$

Это величина дроби, полученной Мишей. Она же должна была получиться и у Лёши. □

Задача 9.4. Дан вписанный четырёхугольник $ABCD$. Известно, что $\angle ADB = 48°$, $\angle BDC = 56°$. Внутри треугольника ABC отмечена точка X так, что $\angle BCX = 24°$, а луч AX является биссектрисой угла BAC. Найдите угол CBX.



Ответ: 38°.

Решение. Углы BDC и BAC равны, так как опираются на одну дугу. Аналогично, равны углы ADB и ACB. Тогда

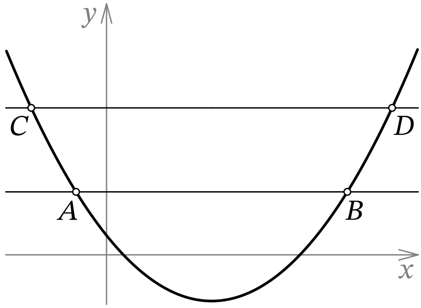
$$\angle ACX = \angle ACB - \angle XCB = \angle ADB - \angle XCB = 48° - 24° = 24° = \angle XCB\,.$$

Получаем, что CX — биссектриса угла ACB, поэтому X — точка пересечения биссектрис треугольника ABC.

Теперь нетрудно найти искомый угол:

$$\angle CBX = \frac{\angle ABC}{2} = \frac{180° - \angle BAC - \angle ACB}{2} = \frac{180° - 56° - 48°}{2} = 38°\,.$$ □

Задача 9.5. На доске нарисован график функции $y = x^2 + ax + b$. Юля нарисовала на том же чертеже две прямые, параллельные оси Ox. Первая прямая пересекает график в точках A и B, а вторая — в точках C и D. Найдите расстояние между прямыми, если известно, что $AB = 5$, $CD = 11$.



Ответ: 24.

Решение. Пусть первая прямая имеет уравнение $y = s$, а вторая — уравнение $y = t$. Тогда расстояние между прямыми равно $(t - s)$.

Длина отрезка AB равна модулю разности корней уравнения $x^2 + ax + b = s$. Распишем разность корней через формулу решения квадратного уравнения $x^2 + ax + (b - s) = 0$:

$$\frac{-a + \sqrt{a^2 - 4(b-s)}}{2} - \frac{-a - \sqrt{a^2 - 4(b-s)}}{2} = \sqrt{a^2 - 4(b-s)} = 5\,,$$

откуда извлекаем

$$a^2 - 4(b - s) = 25\,.$$

Аналогично получаем

$$a^2 - 4(b - t) = 121\,.$$

Вычтем из второго равенства первое и получим

$$121 - 25 = \left(a^2 - 4(b-t)\right) - \left(a^2 - 4(b-s)\right) = 4(t-s)\,.$$

Имеем $4(t - s) = 96$, то есть $t - s = 24$. □

Задача 9.6. На прямой отметили две красные точки и несколько синих. Оказалось, что одна из красных точек содержится ровно в 56 отрезках с синими концами, а другая — в 50 отрезках с синими концами. Сколько синих точек отмечено?

Ответ: 15.

Решение. Пусть слева от первой красной точки находится a синих точек, а справа — b синих точек; слева от второй красной точки — c синих точек, а справа — d синих точек. Тогда $ab = 56$, $cd = 50$. Кроме этого, $a + b = c + d$ — количество синих точек.

Заметим, что среди чисел c и d ровно одно является чётным, так как число 50 делится на 2, но не делится на 4. Получается, что среди чисел a и b тоже ровно одно чётное. Есть ровно два способа представить 56 в виде произведения чётного на нечётное: $56 = 8 \cdot 7$ и $56 = 56 \cdot 1$.

В первом случае подходят $c = 10$, $d = 5$. В качестве примера можно поставить на прямой 5 синих точек, потом красную, потом ещё 3 синих, потом ещё красную и в конце ещё 7 синих.

Во втором случае общее количество синих точек равно 57. Тогда остаётся лишь понять, что следующая система уравнений не имеет целых решений:

$$\begin{cases} c + d = 57\,, \\ cd = 50\,. \end{cases}$$

Можно проверить, что квадратный трёхчлен $t^2 - 57t + 50 = 0$, корнями которого по теореме Виета должны быть числа c и d, не имеет пары натуральных решений (например, достаточно убедиться, что его значения при $t = 0$ и $t = 1$ имеют разные знаки, то есть один из корней лежит на интервале $(0; 1)$).

Альтернативно, можно просто перебрать разложения числа 50 на множители c и d. □

Задача 9.7. На координатной плоскости отмечены точки $O(0; 0)$, $A(5; 0)$, $B(0; 4)$. Прямая $y = kx + b$ такова, что для любой точки M на этой прямой площадь четырехугольника $AOBM$ равна 20. Чему равно k?

Ответ: $-0{,}8$.

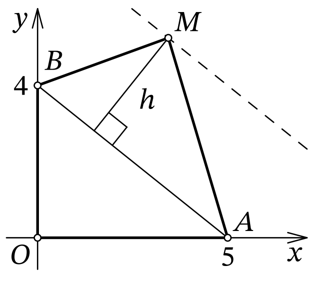


Рис. 1: к решению задачи 9.7

Решение. Для любой точки M из условия задачи выполнено

$$S_{ABM} = S_{OAMB} - S_{ABO} = 20 - 10 = 10\,.$$

С другой стороны,

$$S_{ABM} = \frac{AB \cdot h}{2}\,,$$

где h — высота из точки M на прямую AB (рис. 1). Но это означает, что h не зависит от расположения точки M, что возможно, только если прямая $y = kx + b$ параллельна прямой AB. Тогда у них совпадают угловые коэффициенты.

А уравнение прямой AB получить нетрудно: $y = -0{,}8x + 4$. □

Задача 9.8. Юный энтомолог Дима наблюдает за двумя кузнечиками. Он заметил, что когда кузнечик начинает прыгать, он прыгает на 1 см, через секунду на 2 см, ещё через секунду на 3 см и т.д.

Сначала оба кузнечика сидели в одном месте. Один из них начал прыгать, а через несколько секунд вслед за первым начал прыгать второй (кузнечики прыгают по прямой в одном направлении). В какой-то момент Дима записал в тетрадку, что расстояние между кузнечиками равно 9 см. Несколько секунд спустя он записал, что расстояние между кузнечиками стало 39 см. Сколько секунд прошло между записями? (Укажите все возможные варианты.)

Ответ: 10, 15, 30.

Решение. Заметим, что кузнечики отстают один от другого на один или несколько последовательных прыжков. Таким образом, расстояние между ними является суммой m последовательных натуральных чисел, где m — это то, на сколько секунд отстал старт второго кузнечика.

С другой стороны, уже четыре последовательных прыжка дадут в сумме не менее $1 + 2 + 3 + 4 = 10$, то есть количество прыжков, на которые кузнечики отстают один от другого, не может превышать 3. Тогда возможны варианты $m = 1, 2, 3$. Легко видеть, что все они реализуются: расстояние в 9 может оказаться тремя прыжками $(2 + 3 + 4)$, двумя $(4 + 5)$ или одним.

Если между кузнечиками m прыжков, то каждую секунду расстояние между ними будет расти на m, так как каждое из m слагаемыех, отвечающих за отдельные прыжки, увеличивается на 1. Таким образом, расстояние может увеличиться на 30 за $30/m$ секунд. Подставляя $m = 1, 2, 3$, получаем ответы. □